

# 用遗传算法确定短序列正交多子波\*

潘进 焦李成 陈莉

(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 西安 710071)

**摘要** 提出一种利用遗传算法来确定由短序列正交多尺度函数所生成的正交多子波的方法, 使寻找多子波的思路变得清晰而简单.

**关键词** 多子波 短序列 遗传算法

多子波可以同时具有正交性、对称性、逼近阶和紧支撑, 而这在单子波的情况下是不可能的. 对多子波性质的进一步研究已成为目前工作的一个热点. 确定多尺度函数所生成的多子波是灵活运用多子波理论的一个重要环节.

## 1 短序列正交多子波

设有  $m$  维多尺度函数  $\phi(t)$  满足尺度伸缩方程

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k), \quad (1)$$

其相应的多子波  $\psi(t)$  满足子波方程

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k), \quad (2)$$

其中  $\phi(t) = [\phi^1(t), \phi^2(t), \dots, \phi^m(t)]^T$  和  $\psi(t) = [\psi^1(t), \psi^2(t), \dots, \psi^m(t)]^T$  是  $m$  维向量函数,  $h_k, g_k, k \in \mathbb{Z}$  均为  $m \times m$  矩阵<sup>[1-3]</sup>. 若

$$\langle \phi(t - k), \phi^*(t - l) \rangle = \delta_{k,l} I_{m \times m},$$

并且

$$\langle \phi(t - k), \psi^*(t - l) \rangle = 0_{m \times m}, \quad \langle \psi(t - k), \psi^*(t - l) \rangle = \delta_{k,l} I_{m \times m}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

则称  $\phi(t)$  为正交多尺度函数, 并称  $\psi(t)$  为由  $\phi(t)$  生成的正交多子波. 方程(1)和(2)的系数矩阵构成的序列  $\{h_k\}$  和  $\{g_k\}$  分别称为尺度序列和子波序列, 它们决定了  $\phi(t)$  和  $\psi(t)$  的性质. 在一定的条件下<sup>[3]</sup>, 多子波的设计问题转化为这两个序列的设计. 正交多子波的构造, 是子波领域的一个重要研究课题. 第1个具有紧支撑、逼近阶和对称性的正交多子波是由 Geronimo 等人在 1994 年给出的<sup>[4]</sup>, 随后又出现了一些具有各种性质的正交多子波<sup>[5,6]</sup>. 最近, Jiang<sup>[7]</sup> 给出了正交多子波参数表达式. 他构造了一簇随参数向量  $\theta$  而变化的尺度序列  $\{h_k\}$  和子波序列  $\{g_k\}$ , 应用时只需根据问题选定参数向量  $\theta$  即可同时求出  $\{h_k\}$  和  $\{g_k\}$ , 而不必根据  $\{h_k\}$  去

1998-12-02 收稿, 1999-07-19 收修改稿

\* 国家自然科学基金(批准号: 69772029)和国家“八六三”计划资助项目

求  $\{g_k\}$ . 因此这一结果给多子波的应用带来了方便. 但它也还存在着两点不足. 第 1, 它只给出了  $m = 2$  时的参数表达式, 而不适用于  $m > 2$  的情况. 第 2, 在很多情况下我们首先确定的是尺度序列  $\{h_k\}$  而不是参数向量  $\theta$ . 这时, 如果用文献[7]中的方法来确定子波序列  $\{g_k\}$ , 则需要由  $\{h_k\}$  求出  $\theta$ , 而这往往是困难的. 基于以上考虑, 本文提出一种利用遗传算法由  $\{h_k\}$  求  $\{g_k\}$  的方法.

我们称多尺度函数  $\phi(t)$  是短序列的, 如果当  $k \neq 0, 1, 2, 3$  时,  $h_k = 0$ . 同样, 我们称多子波  $\psi(t)$  是短序列的, 如果当  $k \neq 0, 1, 2, 3$  时,  $g_k = 0$ . 由于当多子波的维数  $m$  较大时尺度序列  $\{h_k\}$  中已有足够多的可调参数来满足实际需要, 因此, 短序列多子波已包含了实际应用中的多数情况.

设  $\phi(t)$  是一个短序列正交多尺度函数,  $\psi(t)$  是我们要求的短序列正交多子波. 令

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k), \quad \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

则由(1),(2)式可得

$$\phi_{j,k} = \sum_{l=2k}^{2k+3} h_{l-2k} \phi_{j+1,l} \quad \psi_{j,k} = \sum_{l=2k}^{2k+3} g_{l-2k} \psi_{j+1,l} \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

在上式中, 取  $j = 0$ , 并利用矩阵表示, 可将(1)式与(2)式合并成

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \phi_{0,0} \\ \phi_{0,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{0,0} \\ \psi_{0,1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ & & & & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \phi_{1,0} \\ \phi_{1,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{1,3} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

或者简记为

$$\begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} [\phi_1]. \quad (5)$$

其中  $\phi_0, \phi_1$  和  $\psi_0$  分别是由(4)式中列向量族  $\phi_{0,k}, \phi_{1,k}$  和  $\psi_{0,k} (k \in \mathbb{Z})$  合并成的列向量.  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{G}$  分别是  $\phi_0$  和  $\psi_0$  的表示矩阵, 它们分别由矩阵  $h_k$  和  $g_k (k = 0, 1, 2, 3)$  按(4)式中的排列而构成. 从尺度空间的角度看,  $\{\phi_{1,k}^i | i = 1, 2, \dots, m, k \in \mathbb{Z}\}$  构成了尺度空间  $V_1$  的一组规范正交基, 而  $\{\phi_{0,k}^i | i = 1, 2, \dots, m, k \in \mathbb{Z}\}$  构成了  $V_1$  的子空间  $V_0$  的一组规范正交基. 我们的目的则是要寻求多子波  $\psi(t)$ , 使得空间

$$W_0 = \text{span}\{\psi_{0,k}^i | i = 1, 2, \dots, m, k \in \mathbb{Z}\}$$

满足  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ , 并且  $\{\psi_{0,k}^i | i = 1, 2, \dots, m, k \in \mathbb{Z}\}$  构成了  $W_0$  的一组规范正交基. 如果我们将(5)式看成是  $V_1$  空间的基底变换式, 则我们的目的就是要在  $\mathbf{H}$  的各行相互规范正交的条件下, 求出矩阵  $\mathbf{G}$  使得(5)中的基底变换矩阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}$  成为正交矩阵, 或者说, 使得这一矩阵的各行

相互规范正交. 显然, 这等价于如下的有限维问题: 已知矩阵

$$S = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

的各行相互规范正交, 即

$$h_0 h_0^T + h_1 h_1^T + h_2 h_2^T + h_3 h_3^T = I, \quad h_0 h_2^T + h_1 h_3^T = 0. \quad (7)$$

求  $g_k, k=0,1,2,3$ , 使得矩阵

$$T = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

的各行也相互规范正交. 设矩阵

$$A = [h_0, h_1], \quad B = [h_2, h_3], \quad X = [g_0, g_1], \quad Y = [g_2, g_3], \quad (9)$$

则有

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ & A & B \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$AA^T + BB^T = I, \quad AB^T = 0, \quad (11)$$

和

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ X & Y \\ & A & B \\ & X & Y \end{bmatrix}. \quad (12)$$

由此, 我们的问题转化为在已知(10)式中的矩阵  $S$  的各行相互规范正交, 即(11)式成立的条件下, 求  $m \times 2m$  矩阵  $X$  和  $Y$ , 使得(12)式中的矩阵  $T$  的各行相互规范正交.

## 2 理论分析

**引理 1** 设有  $m \times 2m$  矩阵  $A$  和  $B$  使得(10)式中矩阵  $S$  的各行相互规范正交, 则存在  $(2m - r_1 - r_2) \times 2m$  矩阵  $X$  和  $Y$ , 使得(12)式中矩阵  $T$  的各行相互规范正交, 其中  $r_1 = \text{rank}(A), r_2 = \text{rank}(B)$ .

**证** 设  $N(A)$  和  $N(B)$  分别为矩阵  $A$  和  $B$  的零空间. 由于

$$\dim N(A) = 2m - r_1, \quad \dim N(B) = 2m - r_2,$$

故

$$\dim N(A) + \dim N(B) = 4m - r_1 - r_2.$$

因为  $N(A)$  和  $N(B)$  都是  $R^{2m}$  的子空间, 所以

$$\dim[N(A) \cap N(B)] \geq 2m - r_1 - r_2,$$

由于  $r_1, r_2 \leq m$ , 故  $2m - r_1 - r_2 \geq 0$ . 当  $2m - r_1 - r_2 = 0$  时,  $r_1 = r_2 = m$ , 矩阵  $T$  就是  $S$ , 从而结论自然成立. 当  $2m - r_1 - r_2 > 0$  时, 取  $X$  是一个  $(2m - r_1 - r_2) \times 2m$  矩阵, 使得  $X^T$  构成了  $N(A) \cap N(B)$  的一个规范正交组, 取  $Y$  是与  $X$  同样大小的零矩阵, 则容易验证,  $X$  和  $Y$  就是

所求的矩阵.

**引理 2** 设  $m \times 2m$  矩阵  $A$  和  $B$  使得(10)式中矩阵  $S$  的各行相互规范正交,则存在  $(r_1 + r_2 - m) \times 2m$  矩阵  $X$  和  $Y$ ,具有  $X^T = A^T u$ ,  $Y^T = B^T v$  的形式,使得(12)式中矩阵  $T$  的各行相互规范正交. 其中  $r_1 = \text{rank}(A)$ ,  $r_2 = \text{rank}(B)$ .

**证** 我们用符号  $R(P)$ 表示矩阵  $P$  的值域空间. 由于

$$\dim R(AA^T) + \dim R(BB^T) = r_1 + r_2 = m + (r_1 + r_2 - m),$$

而  $R(AA^T)$ 和  $R(BB^T)$ 都是  $R^m$  的子空间,所以  $\dim[R(AA^T) \cap R(BB^T)] \geq r_1 + r_2 - m$ . 由于

$$r_1 + r_2 = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) = \text{rank}(AA^T) + \text{rank}(BB^T) \geq \text{rank}(AA^T + BB^T) = m,$$

故  $r_1 + r_2 - m \geq 0$ . 当  $r_1 + r_2 - m = 0$  时,矩阵  $T$  就是  $S$ , 从而结论成立. 当  $r_1 + r_2 - m > 0$  时, 设  $e \in R(AA^T) \cap R(BB^T)$ ,  $e \neq 0$ , 并且  $e = AA^T u = -BB^T v$ . 令  $x^T = A^T u$ ,  $y^T = B^T v$ , 则

$$Ax^T + By^T = AA^T u + BB^T v = 0, \quad xy^T = u^T AB^T v = 0,$$

因此,矩阵  $[x \ y]$  可使矩阵  $T$  的各行相互正交. 由于对  $[x \ y]$  进行规范化并不会影响  $T$  中各行的相互正交性,故可设  $[x \ y]$  本来就是规范的. 由于

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} A \\ x \end{bmatrix}\right) = \text{rank}(A) = r_1, \quad \text{rank}\left(\begin{bmatrix} B \\ y \end{bmatrix}\right) = \text{rank}(B) = r_2.$$

所以用  $\begin{bmatrix} A \\ x \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} B \\ y \end{bmatrix}$  分别替换  $A$  和  $B$  时,所不同的只是矩阵  $\begin{bmatrix} A \\ x \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} B \\ y \end{bmatrix}$  的行数要比  $A$  和  $B$  的行数多 1. 若  $r_1 + r_2 > m + 1$ , 则重复上面的推导可以得到另一个  $[x \ y]$ . 这一步骤可以重复  $r_1 + r_2 - m$  次. 因此我们可以得到  $r_1 + r_2 - m$  个形如  $[x \ y]$  的行矩阵,它们构成了两个  $(r_1 + r_2 - m) \times 2m$  矩阵  $X$  和  $Y$ ,可以证明  $X$  和  $Y$  就是所求的矩阵. 事实上,设  $[x_1 \ y_1]$  和  $[x_2 \ y_2]$  分别是第 1 次和第 2 次得到的行矩阵,则  $x_1^T = A^T u_1$ , 即  $x_1$  是  $A$  中各行的线性组合,而  $x_2^T = \begin{bmatrix} A \\ x_1 \end{bmatrix}^T u_2$ , 即  $x_2$  是  $\begin{bmatrix} A \\ x_1 \end{bmatrix}$  中各行的线性组合,从而  $x_2$  也是  $A$  中各行的线性组合. 依此类推,  $X$  中的每一行都是  $A$  中各行的线性组合. 所以,存在矩阵  $u$  使得  $X^T = A^T u$ . 同理,存在矩阵  $v$ ,使得  $Y^T = B^T v$ .

**定理 3** 对于任意的短序列正交多尺度函数,总存在着短序列正交多子波.

**证** 根据引言中的讨论,我们的问题是在已知(10)式中矩阵  $S$  的各行相互规范正交的条件下,求  $m \times 2m$  矩阵  $X$  和  $Y$  使得(12)式中矩阵  $T$  的各行相互规范正交. 由引理 1 知,有  $(2m - r_1 - r_2) \times 2m$  矩阵  $X_1$  和  $Y_1$ ,使得矩阵  $T$  的各行相互规范正交,其中  $X_1^T$  的各列均属于  $N(A) \cap N(B)$ ,  $Y_1$  是零矩阵. 由引理 2 知,有  $(r_1 + r_2 - m) \times 2m$  矩阵  $X_2$  和  $Y_2$  使得矩阵  $T$  的各行相互规范正交,其中  $X_2^T = A^T u$ ,  $Y_2^T = B^T v$ . 因为

$$[X_1 \ Y_1][X_2 \ Y_2]^T = X_1 X_2^T + Y_1 Y_2^T = X_1 A^T u + Y_1 B^T v = 0, \quad Y_2 X_1^T = 0,$$

所以,若令  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ , 则  $X$  和  $Y$  是  $m \times 2m$  矩阵,且使得矩阵  $T$  的各行相互规范正交.

定理 3 保证了短序列正交多子波的存在性,为用遗传算法确定短序列正交多子波提供了理论依据.

### 3 算法

(1) 通过求解矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{X}^T = \mathbf{0}$$

而获得  $N(\mathbf{A}) \cap N(\mathbf{B})$  中的  $2m - r_1 - r_2$  个标准正交向量.

(2) 设  $\mathbf{x}_1^T = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y}_1^T = \mathbf{B}^T \mathbf{v}$ ,  $[\mathbf{x} \ \mathbf{y}] = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{y}_1] / \|\mathbf{x}_1 \ \mathbf{y}_1\|$ , 其中  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  是待定的  $m$  维列向量. 设

$$\mathbf{z}_0 = [\mathbf{x} \ \mathbf{y}], \quad \mathbf{t} = [\mathbf{A} \ \mathbf{B}] \mathbf{z}_0^T. \quad (13)$$

由于定理 3 保证了  $\min \|\mathbf{t}\| = 0$ , 所以我们可以使用遗传算法来搜索  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$ , 使得  $\|\mathbf{t}\|$  充分小, 以至可以被认为是零.

(3) 用  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$  代替  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ , 重复步骤 (2). 这一过程可以重复  $r_1 + r_2 - m$  次, 以获得引理 2 中的  $(r_1 + r_2 - m) \times 2m$  矩阵  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$ .

(4) 设  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{Y}_1$  是由步骤 (1) 所得到的  $(2m - r_1 - r_2) \times 2m$  矩阵  $\mathbf{X}_2$  和  $\mathbf{Y}_2$  是由步骤 (2) 和 (3) 得到的  $(r_1 + r_2 - m) \times 2m$  矩阵, 则

$$[\mathbf{X} \ \mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}$$

就是所求的矩阵.

### 4 实验

在实验中, 我们设计了一个三维的尺度序列:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, & h_1 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ h_2 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, & h_3 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ -3 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

可以验证, 它所对应的是一个具有紧支撑, 对称性和逼近阶的正交多尺度函数. 对于该尺度序列, 按照 (9) 式定义矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  后  $r_1 = r_2 = 2$ ,  $2m - r_1 - r_2 = 2$ ,  $r_1 + r_2 - m = 1$ , 故由算法的第 1 步可求出 2 个行向量, 由算法的第 2 步可求出 1 个行向量. 所得的正交子波序列为

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 \\ 0.0000 & -0.6124 & 0.3536 \\ 0.3062 & 0.3536 & 0.3062 \end{pmatrix}, & \mathbf{g}_1 &= \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 \\ 0.0000 & 0.6124 & 0.3536 \\ -0.3062 & 0.0000 & 0.3062 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_2 &= \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3062 & 0.0000 & -0.3062 \end{pmatrix}, & \mathbf{g}_3 &= \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.3062 & 0.3536 & -0.3062 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 5 结论

本文给出了一种由尺度序列求子波序列的方法,该方法主要包含了两个步骤.第 1 个步骤是算法 3 中的(1),即求出一个低阶线性方程组的规范正交基本解.第 2 个步骤是算法 3 中的(2)和(3),它利用遗传算法逐个地求出所需的向量.遗传算法理论及本文的实验都表明,只要遗传操作使用得当,算法的收敛速度是很快的.因此,本文的方法为正交多子波的构造提供了一条新途径.

## 参 考 文 献

- 1 Strang G, Strela V. Orthogonal multiwavelets with vanishing moments, J Optical Eng, 1994, 33: 2104 ~ 2107
- 2 Strang G, Strela V. Short wavelets and matrix dilation equation, IEEE Trans on S P, 1995, 43: 108 ~ 115
- 3 Plonka G, Strela V. Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry, SIAM J of Math Anal, 1998, 29: 482 ~ 510
- 4 Geronimo J, Hardin D, Massopust P. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions, J Approx Theory, 1994, 78: 373 ~ 401
- 5 Chui C K, Lian J. A study on orthonormal multiwavelets, J Appl Numer Math, 1996, 20: 273 ~ 298
- 6 Donovan G, Geronimo J, Hardin D, et al. Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions. Soc Ind Appl Math J Math Anal, 1996, 27: 1158 ~ 1192
- 7 Jiang Q. Orthogonal multiwavelets with optimum time-frequency resolution. IEEE Trans on S P, 1998, 46: 830 ~ 844
- 8 陈国良,王煦法,庄镇泉,等.遗传算法及其应用.北京:人民邮电出版社,1997

## 附录 实验中所用的遗传操作步骤

按照算法 3,需要求出  $r_1 + r_2 - m = 1$  个行向量  $[x \ y]$ . 设  $x_1^T = A^T u$ ,  $y_1^T = B^T v$ ,  $[x \ y] = [x_1 \ y_1] / \|[x_1 \ y_1]\|$  其中  $u$  和  $v$  是待求的三维列向量. 设  $z_0$  和  $t$  是由(13)式给出的向量,我们使用遗传算法来搜索  $u$  和  $v$ ,使得  $\|t\| = 0$ .

随着遗传算法的发展,遗传操作的步骤在不断地改进和完善.因此,解决问题时所使用的具体方案也不尽相同.在本文的实验中,我们采用了如下的遗传操作步骤:

(1) 编码 考虑到  $z_0$  是一个单位向量,我们将每个绝对值小于 1 的实数近似表示为十进制小数,精确到小数点后第 10 位.然后用一个长度为 11 的十进制数码表示该小数.数码左边第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) 位与该小数在第  $i$  位上的数值相同,最后的第 11 位中存放的是该小数的符号.

(2) 初始种群的生成 经过编码后,问题的每一个近似解成为进化群体中的一个个体,该个体由 6 个长度为 11 的十进制码构成.这 6 个码表示用矩阵  $A$ 、 $B$  构造所求向量时,矩阵各行的组合系数,也就是待求三维向量  $u$  和  $v$  的分量.初始群体由随机产生的 21 个上述个体所组成.我们将这些个体分别编号为 1, 2,  $\dots$ , 21.

(3) 适应度计算 对于第  $i$  个个体,设其 6 个数码所对应的小数分别为  $u$  和  $v$  的各分量,则定义其适应度为

$$f(i) = 1 / (1 + \|t\|) \quad (i = 1, 2, \dots, 20),$$

其中向量  $t$  由(13)式给出.设目前的种群为第  $k$  代种群,这代种群中的最大适应度为  $f(i_0)$ .令  $g(k) = f(i_0)$ ,则  $g(k)$  就反映了繁衍到第  $k$  代时的最好进化程度.具体进化过程见图 1.

为了防止退化现象,我们将具有最大适应度的个体复制成编号为 21 的个体,这一编号上的个体体现本代

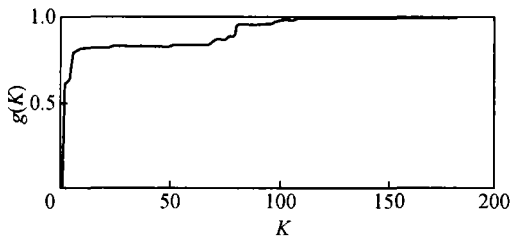


图 1 本代最高适应度  $g(k)$  随进化代数  $k$  的变化曲线

群体的最好进化情况. 它将不经历下面的交叉和变异过程而直接参与下一代的选取.

(4) 停机条件 当  $|g(k) - 1| < 10^{-8}$  时, 停机.

(5) 选取 设  $M$  和  $m$  分别为本代个体适应度的最大值和最小值. 对于第  $i$  个个体, 定义其相对适应度为

$$f_r(i) = \frac{f(i) - m}{M - m} \quad (i = 1, 2, \dots, 21).$$

当  $f_r(i) < 0.3$  时, 这一个体将被编号为  $i_0$  的适应度最高的个体所取代, 其特性将不能遗传给下一代群体.

(6) 交叉 对于每个编号为偶数的个体中的每一个数码, 在表示同一数值的数码中, 随机产生一个与之配对的数码和一个交叉位, 从而产生一个新的数码.

(7) 变异 在每组表示同一数值的数码中, 随机产生 2 个变异数码, 对于这 2 个变异数码中的每一个, 随机产生 2 个变异位, 从而产生 2 个新的数码.

(8) 转向步骤(3).